

© 2025 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный университет)

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О КРУГАХ ГЕРШГОРИНА С ПРИМЕНЕНИЕМ К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ¹

Рассмотрено применение теоремы о кругах Гершгорина и некоторых производных от нее результатов для оценки собственных значений матриц. Развиваются полученные результаты для создания области локализации собственных значений матриц с интервально неопределенными постоянными и нестационарными элементами. Вводится понятие *ϵ -кругов* для получения более точных оценок данных областей, чем при использовании кругов Гершгорина. Полученные результаты применены к анализу устойчивости сетевых систем, где показано, что предложенные методы позволяют анализировать сеть с гораздо большим числом агентов, чем при использовании методов решения линейных матричных неравенств в CVX и Yalmip/SeDuMi, а также алгоритмов eig (для вычисления собственных чисел матрицы) и lyap (для решения уравнения Ляпунова) в MatLab. Показано, что если разработанные методы применять не к самой системе, а к результату, полученному с помощью метода функций Ляпунова, то можно исследовать системы с матрицами без диагонального преобладания. Это позволило рассмотреть модификацию условия Демидовича на системы с нестационарными параметрами и синтез закона управления для нестационарных систем с матрицами без диагонального преобладания. Все полученные результаты иллюстрируются численным моделированием.

Ключевые слова: теорема о кругах Гершгорина, область локализации собственных значений матрицы, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S0005231025060012, **EDN:** IJPPBD

1. Введение

При анализе свойств динамических систем и синтезе закона управления одним из ключевых вопросов является устойчива ли система. В настоящее время для определения устойчивости применяются различные методы и подходы: вычисление собственных значений матрицы [1], различные алгебраические и частотные критерии устойчивости [1], метод функций Ляпунова [1], дивергентные методы исследования устойчивости [2] и т.д.

¹ Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № FFNF-2024-0008 (№ 124041100006-1 в ЕГИСУ НИОКТР).

Данная статья сконцентрирована на построении области локализации собственных значений матриц с применением полученного результата к анализу и синтезу систем управления. Для построения области локализации собственных значений будет рассмотрена теорема о кругах Гершгорина [3–5] (далее просто теорема Гершгорина) и некоторые следствия из нее, а также будут получены новые результаты по обобщению данной теоремы на случай параметрически неопределенных матриц и матриц с нестационарными параметрами.

Теорема Гершгорина и различные ее модификации неоднократно рассматривались в литературе. Интерес к данной теореме связан с простым способом определения области локализации собственных значений. Зачастую теорема Гершгорина приводит к изучению систем, содержащих матрицы с диагональным преобладанием. В частности, такие системы изучались в [6–8] и были названы *сверхустойчивыми* (если все круги Гершгорина целиком находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости). Показано, что анализ и синтез систем управления приводит к задачам линейного программирования. В [9–13] получены уточняющие области локализации в виде усредненных оценок, использовании l_1 векторных норм и т.д., а в [14, 15] предложен синтез статических линейных законов управления с использованием теоремы Гершгорина. В [16–18] рассмотрено применение теоремы Гершгорина к исследованию устойчивости моделей в химической промышленности, моделей электрических сетей с трехфазными генераторами и биологических моделей эпидемии.

Анализ литературы показал, что при построении области локализации собственных значений матриц теорема Гершгорина имеет преимущества в простоте ее применения, выпуклой процедуре поиска области локализации и небольших вычислительных затратах. Однако ограничения в применении данной теоремы связаны с завышенными оценками области локализации и рассмотрением матриц с диагональным преобладанием (или приводимым к ним с использованием диагональной матрицы для преобразования базиса). Требование диагонального преобладания является существенно ограничительным и при синтезе закона управления.

В данной статье будет рассмотрено решение следующих задач:

- 1) будут рассмотрены оценки и области локализации собственных значений постоянной матрицы;
- 2) будут получены области локализации собственных значений матрицы с интервальной параметрической неопределенностью;
- 3) в качестве примеров применения полученных результатов будут рассмотрены:
 - а) задача синхронизации сетевых систем с большим числом скалярных агентов, где будет показано, что предложенные результаты могут быть применимы для анализа устойчивости гораздо большего числа агентов, чем при использовании методов решения линейных матрич-

ных неравенств в CVX и Yalmip/SeDuMi, а также алгоритмов eig (для вычисления собственных чисел матрицы) и lyap (для решения уравнения Ляпунова) в MatLab;

- б) модификация условия Демидовича (об устойчивости линейных систем с нестационарными параметрами [19, теорема 6.1; 23]) на системы с интервально неопределенными нестационарными параметрами и с матрицей исходной системы без диагонального преобладания;
- в) задача поиска матрицы в линейном законе управления с использованием линейных матричных неравенств для объектов с матрицей без диагонального преобладания.

В статье используются следующие *обозначения*: $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство с векторной нормой $|\cdot|$, $\mathbb{R}^{n \times m}$ – множество всех действительных матриц размерности $n \times m$ с индуцированной матричной нормой $\|Q\|$, $\lambda_i\{Q\}$ – i -е собственное число квадратной матрицы Q , $\Re\{\lambda_i\{Q\}\}$ – действительная часть i -го собственного числа квадратной матрицы Q , $\Im\{\lambda_i\{Q\}\}$ – мнимая часть i -го собственного числа квадратной матрицы Q , I – единичная матрица соответствующего порядка, матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$ также будет обозначаться в виде (q_{ij}) , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

2. Оценки области локализации собственных чисел

2.1. Постоянные матрицы

В данном разделе будут получены оценки области локализации собственных чисел матрицы $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с постоянными элементами. Для уточнения данных оценок будут дополнительно рассмотрены диагональные матрицы $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ и $H = \text{diag}\{h_1, \dots, h_n\}$. Введем обозначения сумм по строкам и столбцам абсолютных значений элементов матриц Q , $D^{-1}QD$ и $H^{-1}QH$ без диагональных элементов в виде

$$\begin{aligned} R_i(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}|, & C_j(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n |q_{ij}|, \\ R_i^D(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |q_{ij}|, & C_j^D(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{d_i}{d_j} |q_{ij}|, \\ R_i^H(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{h_j}{h_i} |q_{ij}|, & C_j^H(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{h_i}{h_j} |q_{ij}|. \end{aligned}$$

Ниже представлены две леммы, которые позволяют получить оценки снизу и сверху на действительные части собственных чисел матрицы Q .

Лемма 1. Рассмотрим матрицу $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Существуют $d_i > 0$, $h_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ такие, что справедливы следующие оценки:

$$(1) \quad \begin{aligned} \max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\} &\leq \sigma_{\max}^D\{Q\} \leq \sigma_{\max}\{Q\}, \\ \min_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\} &\geq \sigma_{\min}^H\{Q\} \geq \sigma_{\min}\{Q\}, \end{aligned}$$

где

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\max}(Q) &= \min \left\{ \max_i \{q_{ii} + R_i(Q)\}, \max_j \{q_{jj} + C_j(Q)\} \right\}, \\ \sigma_{\min}(Q) &= \max \left\{ \min_i \{q_{ii} - R_i(Q)\}, \min_j \{q_{jj} - C_j(Q)\} \right\}, \\ \sigma_{\max}^D(Q) &= \min_D \left\{ \max_i \{q_{ii} + R_i^D(Q)\}, \max_j \{q_{jj} + C_j^D(Q)\} \right\}, \\ \sigma_{\min}^H(Q) &= \max_H \left\{ \min_i \{q_{ii} - R_i^H(Q)\}, \min_j \{q_{jj} - C_j^H(Q)\} \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно теореме Гершгорина [4] все собственные значения матрицы Q заключены в объединении n кругов $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}| \right\}$. Поскольку матрица Q^T имеет те же собственные значения, что и матрица Q , то все собственные значения Q также заключены в объединении n кругов $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ji}| \right\}$. Следовательно, $\sigma_{\min}\{Q\} \leq \min_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}$ и $\sigma_{\max}\{Q\} \geq \max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}$.

Теперь рассмотрим диагональную матрицу $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$. Известно, что собственные значения матриц $D^{-1}QD$ и Q не меняются. Однако за счет варьирования коэффициентов d_i могут быть изменены радиусы кругов Гершгорина для матрицы Q в виде $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |q_{ij}| \right\}$ и для матрицы Q^T в виде $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_i}{d_j} |q_{ji}| \right\}$. Следовательно, существуют $d_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ такие, что $\sigma_{\max}^D\{Q\} \leq \sigma_{\max}\{Q\}$. Однако невозможно одновременно уменьшить радиусы всех кругов варьированием d_i , т.е. при уменьшении радиусов одних кругов увеличиваются радиусы других. Поэтому для получения оценки $\sigma_{\min}^H\{Q\} \geq \sigma_{\min}\{Q\}$ используется матрица H вместо D .

Лемма 2. Рассмотрим матрицу $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Существуют $d_i > 0$, $h_i > 0$ $i = 1, \dots, n$ и $\alpha, \beta \in [0, 1]$ такие, что справедливы следующие оценки:

$$(3) \quad \begin{aligned} \max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\} &\leq \sigma_{\max}^{D, \alpha}\{Q\} \leq \sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\}, \\ \min_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\} &\geq \sigma_{\min}^{H, \beta}\{Q\} \geq \sigma_{\min}^{\beta}\{Q\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \sigma_{\max}^{\alpha}(Q) &= \min_{\alpha} \left\{ \max_i \{q_{ii} + [R_i(Q)]^{\alpha} [C_i(Q)]^{1-\alpha}\} \right\}, \\
 \sigma_{\min}^{\beta}(Q) &= \max_{\beta} \left\{ \min_i \{q_{ii} - [R_i(Q)]^{\beta} [C_i(Q)]^{1-\beta}\} \right\}, \\
 \sigma_{\max}^{D,\alpha}(Q) &= \min_{D,\alpha} \left\{ \max_i \{q_{ii} + [R_i^D(Q)]^{\alpha} [C_i^D(Q)]^{1-\alpha}\} \right\}, \\
 \sigma_{\min}^{H,\beta}(Q) &= \max_{H,\beta} \left\{ \min_i \{q_{ii} - [R_i^H(Q)]^{\beta} [C_i^H(Q)]^{1-\beta}\} \right\}.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно теореме Островского [4] все собственные числа матрицы Q заключены в объединении n кругов $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \left[\sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}| \right]^{\alpha} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ji}| \right]^{1-\alpha} \right\}$. Следовательно, существует α такое, что $\sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\} \geq \max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}$. Аналогично рассуждая получим, что существует β такое, что $\sigma_{\min}^{\beta}\{Q\} \leq \min_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}$.

За счет варьирования коэффициентов d_i могут быть изменены радиусы кругов $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \left[\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |q_{ij}| \right]^{\alpha} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |q_{ji}| \right]^{1-\alpha} \right\}$. Следовательно, существуют d_i , $i = 1, \dots, n$ и α такие, что $\sigma_{\max}^{D,\alpha}\{Q\} \leq \sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\}$. Из аналогичных рассуждений следует, что существуют h_i , $i = 1, \dots, n$ и β такие, что $\sigma_{\min}^{H,\beta}\{Q\} \leq \sigma_{\min}^{\beta}\{Q\}$.

Следствие 1. Если любая оценка сверху в леммах 1 и 2 принимает отрицательное значение, то она является оценкой степени устойчивости, понятие которой было введено Я.З. Цыпкиным и П.В. Бромбергом в [20].

Следствие 2. Из доказательств лемм 1 и 2 также следует, что пересечением соответствующих кругов можно найти область локализации собственных значений матрицы Q , откуда можно найти не только оценки сверху и снизу на действительные части собственных значений, но и оценку сверху на мнимую часть, которую обозначим как $\hat{\Im}\{Q\} \geq \max_i \{\Im\{\lambda_i\{Q\}\}\}$. Значение $\hat{\Im}\{Q\}$ определяется как максимальное значение пересечения кругов вдоль мнимой оси. Если оценка сверху действительной части собственного числа матрицы Q имеет отрицательное значение, то можно получить оценку колебательности μ в виде $\mu \leq \hat{\mu} := \frac{\hat{\Im}\{Q\}}{|\max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}|}$. Хорошо известно [1], что колебательность используется для оценки перерегулирования Π в виде $\Pi \leq e^{\pi/\mu}$. Тогда новая оценка степени перерегулирования определяется как $\Pi \leq e^{\pi/\hat{\mu}}$.

Зная оценку степени устойчивости, оценку колебательности и оценку снизу на действительную часть собственного числа можно построить ма-

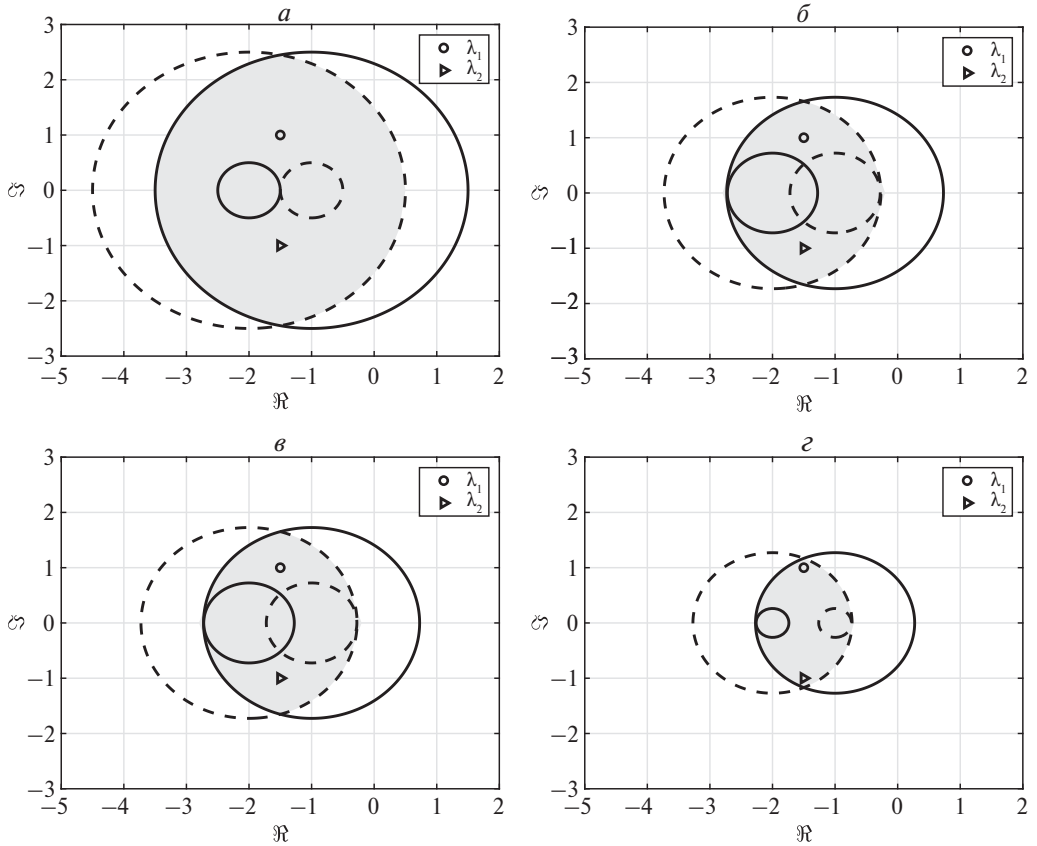


Рис. 1. Области локализации (серая область) собственных значений матрицы Q при использовании оценок (1) и (3).

жоранту и миноранту для переходного процесса линейной системы при единичном ступенчатом воздействии, что является развитием результатов С.А. Чаплыгина, Н.Н. Лузина, А.А. Фельдбаума и А.М. Рубинчика [21, 22].

Сказанное в следствиях 1 и 2 будет справедливо и в дальнейших обобщениях полученных результатов на возмущенные матрицы. Продемонстрируем сказанное в леммах и следствиях на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим матрицу $Q = \begin{bmatrix} -1 & -2,5 \\ -0,5 & -2 \end{bmatrix}$, собственные значения которой равны $-1,5 \pm i$. На рис. 1 изображены области локализации (выделены серым цветом) при использовании:

- теоремы о кругах Гершгорина (рис. 1,а);
- леммы 1 с $H = \text{diag}\{1; 0,48\}$ и $D = \text{diag}\{1; 2,08\}$ (рис. 1,б);
- леммы 2 с $\alpha = \beta = 0,23$ и $D = H = I$ (рис. 1,в);
- леммы 2 с $\alpha = \beta = 0,01$, $H = \text{diag}\{1; 0,51\}$ и $D = \text{diag}\{1; 1,96\}$ (рис. 1,г);

Сплошные круги соответствуют кругам, радиусы которых вычислены по строкам матрицы, штриховые круги – по столбцам матрицы.

В табл. 1 приведены оценки сверху и снизу действительной части собственного числа матрицы Q . Точность вычисляется как относительная погрешность между соответствующей оценкой и $\Re\{\lambda\{Q\}\} = -1,5$ (например, $\frac{|-3,5+1,5|}{1,5}100\% = 133,3\%$).

Таблица 1. Оценки действительной части собственных значений матрицы Q , полученные при использовании (1) и (3)

Рисунок	Оценка $\Re\{\lambda\{Q\}\}$	Точность, %
Рис. 1, <i>a</i>	$\sigma_{\min}(Q) = -3,5; \sigma_{\max}(Q) = 0,5$	133,3
Рис. 1, <i>б</i>	$\sigma_{\min}^H(Q) = -2,72; \sigma_{\max}^D(Q) = -0,27$	82
Рис. 1, <i>в</i>	$\sigma_{\min}^\beta(Q) = -2,72; \sigma_{\max}^\alpha(Q) = -0,27$	82
Рис. 1, <i>г</i>	$\sigma_{\min}^{H,\beta}(Q) = -2,26; \sigma_{\max}^{D,\alpha}(Q) = -0,73$	51,3

Из рис. 1 можно найти оценки мнимой части, которые отражены в табл. 2. Точность вычисляется как относительная погрешность между соответствующей оценкой и $\Im\{\lambda\{Q\}\} = 1$.

Таблица 2. Оценки мнимой части собственных значений, полученные при использовании лемм 1 и 2

Рисунок	Оценка $\Im\{\lambda\{Q\}\}$	Точность, %
Рис. 1, <i>a</i>	2,3	130
Рис. 1, <i>б</i>	1,8	80
Рис. 1, <i>в</i>	1,7	70
Рис. 1, <i>г</i>	1,2	20

Наилучшие оценки действительной и мнимой частей гарантирует результат из леммы 2, где одновременно используются варьируемые параметры D , H , α и β .

2.2. Возмущенные матрицы

В данном разделе рассмотрим поиск областей локализации собственных чисел для матриц с интервально неопределенными параметрами:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & Q(t) = Q_0 + \Delta Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\
 & Q_0 = (q_{ij}^0), \quad \Delta Q(t) = (\Delta q_{ij}(t)), \\
 & \Delta \underline{q}_{ii} \leq \Delta q_{ii}(t) \leq \Delta \bar{q}_{ii}, \quad |\Delta q_{ij}(t)| \leq m_{ij} \text{ при } i \neq j.
 \end{aligned}$$

Поскольку элементы матрицы могут принимать любые значения из допустимых интервалов, то вместо кругов локализации собственных чисел, рассмотренных в доказательствах лемм 1 и 2, введем в рассмотрение следующую фигуру.

Определение 1. Фигуру, образованную объединением кругов $\mathcal{EC} = \cup_{q \in [\underline{q}, \bar{q}]} \{z \in \mathbb{C} : |z - q| \leq R\}$, назовем e -кругом.

Введем обозначения для оценок сверху сумм по строкам и столбцам абсолютных значений элементов матриц $Q(t)$, $D^{-1}Q(t)D$ и $H^{-1}Q(t)H$, исключая диагональные элементы, в виде

$$\begin{aligned}\hat{R}_i(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n (|q_{ij}^0| + m_{ij}), & \hat{C}_j(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n (|q_{ij}^0| + m_{ij}), \\ \hat{R}_i^D(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} (|q_{ij}^0| + m_{ij}), & \hat{C}_j^D(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{d_i}{d_j} (|q_{ij}^0| + m_{ij}), \\ \hat{R}_i^H(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{h_j}{h_i} (|q_{ij}^0| + m_{ij}), & \hat{C}_j^H(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{h_i}{h_j} (|q_{ij}^0| + m_{ij}).\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим обобщение лемм 1 и 2 на случай матриц с интервально неопределенными элементами. Ниже в формулировках лемм опустим зависимость матриц и параметров от t ради упрощения записи выражений.

Лемма 3. Собственные значения матрицы Q из (5) находятся в области пересечения ε -кругов

$$(6) \quad \mathcal{EC}_{\text{row}} \cap \mathcal{EC}_{\text{col}},$$

где

$$(7) \quad \begin{aligned}\mathcal{EC}_{\text{row}} &= \cup_{i=1}^n \mathcal{EC}_{\text{row}, i}, \\ \mathcal{EC}_{\text{row}, i} &= \cup_{\Delta q_{ii} \in [\Delta \underline{q}_{ii}; \Delta \bar{q}_{ii}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{ii}^0 - \Delta q_{ii}| \leq \hat{R}_i(Q) \right\},\end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned}\mathcal{EC}_{\text{col}} &= \cup_{j=1}^n \mathcal{EC}_{\text{col}, j}, \\ \mathcal{EC}_{\text{col}, j} &= \cup_{\Delta q_{jj} \in [\Delta \underline{q}_{jj}; \Delta \bar{q}_{jj}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{jj}^0 - \Delta q_{jj}| \leq \hat{C}_j(Q) \right\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\lambda(t)$ – собственное значение матрицы $Q(t)$ и $s(t) = \text{col}\{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$ – собственный вектор, соответствующий данному собственному значению. Выберем i -ю компоненту вектора $s(t)$ так, что $\sup\{s_i(t)\} \geq \max\{\sup\{s_1(t)\}, \dots, \sup\{s_{i-1}(t)\}, \sup\{s_{i+1}(t)\}, \dots, \sup\{s_n(t)\}\}$. Обозначим: $\bar{s}_i = \sup\{s_i(t)\}$. Из соотношения $\lambda(t)s(t) = Q(t)s(t)$ выпишем выражение для i -й координаты в виде $\lambda(t)s_i(t) = \sum_{j=1}^n q_{ij}(t)s_j(t)$ или $(\lambda(t) -$

$-q_{ii}(t))s_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij}(t)s_j(t)$. Воспользовавшись неравенством треугольника, рассмотрим оценку

$$(9) \quad \begin{aligned}|\lambda(t) - q_{ii}(t)||s_i(t)| &= \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij}(t)s_j(t) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)s_j(t)| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)||s_j(t)| \leq \bar{s}_i \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)|.\end{aligned}$$

Перепишем выражение (9) как $|\lambda(t) - q_{ii}(t)||s_i(t)| - \bar{s}_i \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)| \leq 0$ или в виде

$$(10) \quad \bar{s}_i \left(|\lambda(t) - q_{ii}(t)| \frac{|s_i(t)|}{\bar{s}_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)| \right) \leq 0.$$

Так как $\frac{|s_i(t)|}{\bar{s}_i} \leq 1$, то выражение (10) будет выполнено, если будет выполнено неравенство

$$(11) \quad |\lambda(t) - q_{ii}(t)| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)|.$$

Так как $\Delta q_{ii} \leq \Delta q_{ii}(t) \leq \Delta \bar{q}_{ii}$ и $|\Delta q_{ij}(t)| \leq m_{ij}$ при $i \neq j$, то перепишем неравенство (11) в виде ϵ -круга $\mathcal{EC}_{\text{row}, i}$ из (7).

Соотношение (7) выполнено для некоторого i . Поскольку неизвестно, какое i соответствует данному $\lambda(t)$, то можно лишь сказать, что $\lambda(t)$ принадлежит объединению ϵ -кругов $\mathcal{EC}_{\text{row}} = \cup_{i=1}^n \mathcal{EC}_{\text{row}, i}$. Значит, все собственные числа матрицы $Q(t)$ находятся в объединении ϵ -кругов $\mathcal{EC}_{\text{row}}$.

Поскольку матрица $Q^T(t)$ имеет те же собственные значения, что и матрица $Q(t)$, то все собственные значения матрицы $Q(t)$ заключены в объединении ϵ -кругов $\mathcal{EC}_{\text{col}} = \cup_{j=1}^n \mathcal{EC}_{\text{col}, j}$, см. (8). Дальнейшие рассуждения для матрицы $Q^T(t)$ аналогичны рассуждениям для матрицы $Q(t)$. Так как собственные значения матрицы $Q(t)$ находятся одновременно в $\mathcal{EC}_{\text{row}}$ и $\mathcal{EC}_{\text{col}}$, значит, они находятся в области (6).

Лемма 4. Пусть заданы $d_i > 0$, $h_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Собственные значения матрицы Q из (5) находятся в области пересечения ϵ -кругов

$$\mathcal{EC}_{\text{row}}^D \cap \mathcal{EC}_{\text{col}}^H,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{EC}_{\text{row}}^D &= \cup_{i=1}^n \mathcal{EC}_{\text{row}, i}^D, \\ \mathcal{EC}_{\text{row}, i}^D &= \cup_{\Delta q_{ii} \in [\Delta \underline{q}_{ii}; \Delta \bar{q}_{ii}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{ii}^0 - \Delta q_{ii}| \leq \hat{R}_i^D(Q) \right\}, \\ \mathcal{EC}_{\text{col}}^H &= \cup_{j=1}^n \mathcal{EC}_{\text{col}, j}^H, \\ \mathcal{EC}_{\text{col}, j}^H &= \cup_{\Delta q_{jj} \in [\Delta \underline{q}_{jj}; \Delta \bar{q}_{jj}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{jj}^0 - \Delta q_{jj}| \leq \hat{C}_j^H(Q) \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Результаты леммы 4 следуют из леммы 3 и того факта, что собственные значения матриц $D^{-1}Q(t)D$, $H^{-1}Q(t)H$ и $Q(t)$ одни и те же.

Лемма 5. Пусть заданы $d_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ и $\alpha \in [0; 1]$. Собственные значения матрицы Q из (5) находятся в области пересечения ϵ -кругов

$$\mathcal{EC}^{D,\alpha} = \cup_{i=1}^n \mathcal{EC}_i^{D,\alpha},$$

где

$$\mathcal{EC}_i^{D,\alpha} = \cup_{\Delta q_{ii} \in [\Delta \underline{q}_{ii}; \Delta \bar{q}_{ii}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{ii} - \Delta q_{ii}| \leq [\hat{R}_i^D(Q)]^\alpha [\hat{C}_i^D(Q)]^{1-\alpha} \right\}.$$

Доказательство. Доказательство леммы 5 следует из доказательств лемм 2 и 3 и того факта, что собственные значения матриц $D^{-1}Q(t)D$ и $Q(t)$ одинаковые.

Следствие 3. Аналогично леммам 1 и 2 можно выписать оценки на максимальные и минимальные значения собственных значений матрицы Q с использованием результатов лемм 3–5, т.е. существуют числа $\bar{d}_i > 0$, $\bar{h}_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ и $\alpha, \beta \in [0; 1]$ такие, что справедливы следующие оценки:

$$(12) \quad \begin{aligned} \max_i \left\{ \sup_t \{ \Re \{ \lambda_i \{ Q(t) \} \} \} \right\} &\leq \sigma_{\max}^D \{ Q(t) \} \leq \sigma_{\max} \{ Q(t) \}, \\ \min_i \left\{ \sup_t \{ \Re \{ \lambda_i \{ Q(t) \} \} \} \right\} &\geq \sigma_{\min}^H \{ Q(t) \} \geq \sigma_{\min} \{ Q(t) \}, \\ \max_i \left\{ \sup_t \{ \Re \{ \lambda_i \{ Q(t) \} \} \} \right\} &\leq \sigma_{\max}^{D,\alpha} \{ Q(t) \} \leq \sigma_{\max}^\alpha \{ Q(t) \}, \\ \min_i \left\{ \sup_t \{ \Re \{ \lambda_i \{ Q(t) \} \} \} \right\} &\geq \sigma_{\min}^{H,\beta} \{ Q(t) \} \geq \sigma_{\min}^\beta \{ Q(t) \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(Q(t)) &= \min \left\{ \max_i \{ q_{ii}^0 + \Delta \bar{q}_{ii} + \hat{R}_i(Q) \}, \max_j \{ q_{jj}^0 + \Delta \bar{q}_{jj} + \hat{C}_j(Q) \} \right\}, \\ \sigma_{\min}(Q(t)) &= \max \left\{ \min_i \{ q_{ii}^0 - \Delta \bar{q}_{ii} - \hat{R}_i(Q) \}, \min_j \{ q_{jj}^0 - \Delta \bar{q}_{jj} - \hat{C}_j(Q) \} \right\}, \\ \sigma_{\max}^D(Q(t)) &= \min_D \left\{ \max_i \{ q_{ii}^0 + \Delta \bar{q}_{ii} + \hat{R}_i^D(Q) \}, \max_j \{ q_{jj}^0 + \Delta \bar{q}_{jj} + \hat{C}_j^D(Q) \} \right\}, \\ \sigma_{\min}^H(Q(t)) &= \max_H \left\{ \min_i \{ q_{ii}^0 - \Delta \bar{q}_{ii} - \hat{R}_i^H(Q) \}, \min_j \{ q_{jj}^0 - \Delta \bar{q}_{jj} - \hat{C}_j^H(Q) \} \right\}, \\ \sigma_{\max}^\alpha(Q(t)) &= \min_\alpha \left\{ \max_i \{ q_{ii}^0 + \Delta \bar{q}_{ii} + [\hat{R}_i(Q)]^\alpha [\hat{C}_i(Q)]^{1-\alpha} \} \right\}, \\ \sigma_{\min}^\beta(Q(t)) &= \max_\beta \left\{ \min_i \{ q_{ii}^0 - \Delta \bar{q}_{ii} - [\hat{R}_i(Q)]^\beta [\hat{C}_i(Q)]^{1-\beta} \} \right\}, \\ \sigma_{\max}^{D,\alpha}(Q(t)) &= \min_{D,\alpha} \left\{ \max_i \{ q_{ii}^0 + \Delta \bar{q}_{ii} + [\hat{R}_i^D(Q)]^\alpha [\hat{C}_i^D(Q)]^{1-\alpha} \} \right\}, \\ \sigma_{\min}^{H,\beta}(Q(t)) &= \max_{H,\beta} \left\{ \min_i \{ q_{ii}^0 - \Delta \bar{q}_{ii} - [\hat{R}_i^H(Q)]^\beta [\hat{C}_i^H(Q)]^{1-\beta} \} \right\}. \end{aligned}$$

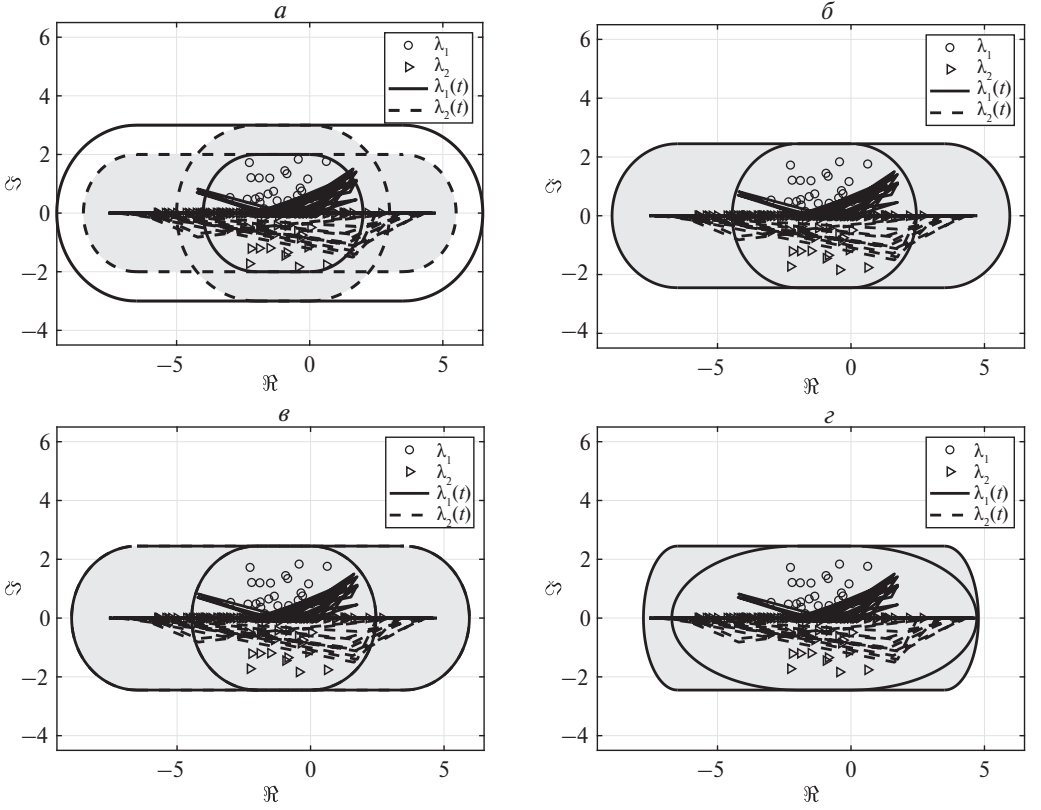


Рис. 2. Области локализации (серая область) собственных значений возмущенных матриц Q и $Q(t)$.

Пример 2. Рассмотрим две параметрически неопределенные матрицы Q с постоянными и переменными параметрами в виде

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & 2r_{12} \\ 3r_{21} & 4r_{22} \end{bmatrix}}_{\Delta Q},$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(t) & 2 \cos(1,5t) \\ 3 \text{sign}(\sin(2t)) & 4 \text{sign}(\cos(1,7t)) \end{bmatrix}}_{\Delta Q(t)},$$

где r_{ij} , $i, j = 1, 2$ – псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале $(-1; 1)$. Рассмотрим 100 реализаций для каждого r_{ij} . Матрицы ΔQ и $\Delta Q(t)$ имеют одинаковые m_{ij} , поэтому и оценки области локализации будут одинаковыми.

На рис. 2 представлена область локализации собственных значений Q и $Q(t)$ с использованием результатов лемм 3–5 (серые области), где малыми кругами и треугольниками изображены собственные значения матрицы Q с постоянными параметрами, а непрерывными и штриховыми линиями (внут-

ри серых областей) – собственные значения матрицы Q с нестационарными параметрами. На трех рисунках из четырех пары e -кругов совпали за счет варьирования d_i , h_i , α и β , поэтому на трех рисунках указаны только два e -круга. Соответствующие рисунки получены при использовании:

- леммы 3 (рис. 2,а);
- леммы 4 с $D = \text{diag}\{1; 1,23\}$ и $H = \text{diag}\{1; 0,81\}$ (рис. 2,б);
- леммы 5 с $\alpha = \beta = 0,5$ и $D = H = I$ (рис. 2,в);
- леммы 5 с $\alpha = 0,5$ и $D = \text{diag}\{1; 0,52\}$ (рис. 2,г).

Сплошная граница e -кругов соответствует фигурам, составленным по строкам матрицы, с пунктирной границей – по столбцам матрицы.

3. Анализ устойчивости систем управления

В данном разделе рассмотрим несколько применений результатов предыдущего раздела для анализа и синтеза систем управления.

3.1. Синхронизация сетевых систем

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из n взаимосвязанных агентов вида

$$(13) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}x_j + u_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in \mathbb{R}$ – сигнал управления, $|q_{ij}| \leq m_{ij}$. Требуется обеспечить выполнение условия $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ для всех x_i за счет соответствующего выбора u_i , $i = 1, \dots, n$.

Зададим закон управления

$$(14) \quad u_i = -qx_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $q > 0$.

Введем обозначения: $x = \text{col}\{x_1, \dots, x_n\}$, $Q_0 = -qI$, $\Delta Q = (q_{ij})$ и $Q = Q_0 + \Delta Q$. Тогда (13) и (14) можно переписать в виде

$$(15) \quad \dot{x} = Qx.$$

В результате проверка условия $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ сводится к проверке устойчивости матрицы $Q_0 + \Delta Q$, которая может быть обеспечена за счет соответствующего выбора q в (14).

Пусть $q = -10^3$ и q_{ij} – псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале $(-1; 1)$. Для анализа устойчивости матрицы $Q_0 + \Delta Q$ воспользуемся:

- функциями `eig` (вычисление собственных чисел матрицы) и `lyap` (решение уравнения Ляпунова) в MatLab, считая q_{ij} известными;

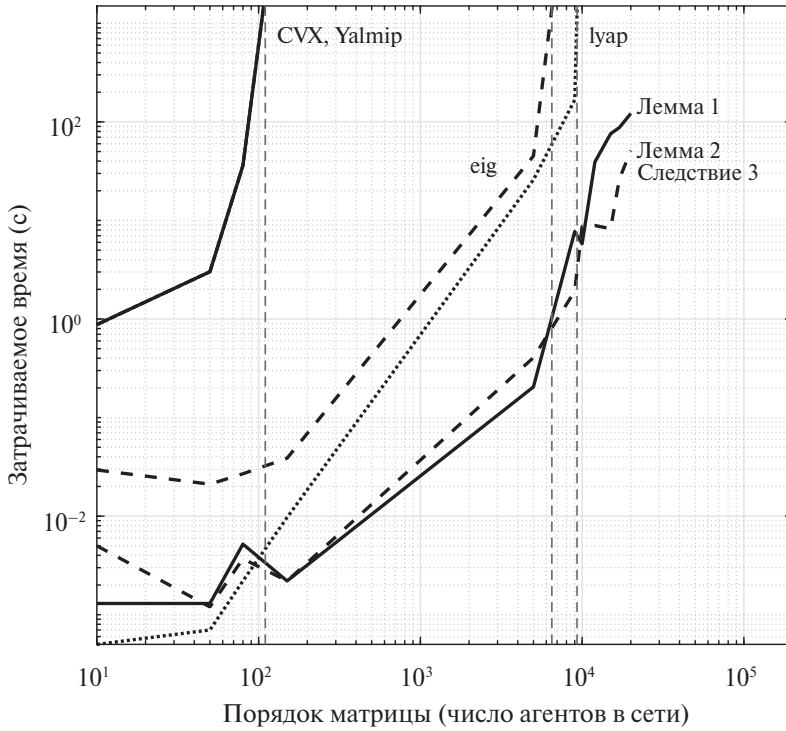


Рис. 3. Зависимость затрачиваемого времени на выяснения устойчивости системы (матрицы Q) от числа агентов в сети (n).

- приложениями для решения линейных матричных неравенств CVX и Yalmip/SeDuMi, считая q_{ij} известными;
- леммой 1 (считая $\sigma_{\max}\{Q\}$) и леммой 2 (считая $\sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\}$ с перебором α от 0 до 1 с шагом 0,1), считая q_{ij} известными;
- следствием 3 (считая $\sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\}$ с перебором α от 0 до 1 с шагом 0,1), считая q_{ij} неизвестными, но с известными m_{ij} .

На рис. 3 представлены графики затрачиваемого времени на выполнение операции по определению устойчивости $Q_0 + \Delta Q$ в зависимости от размерности данной матрицы (числа агентов в сети) и при использовании соответствующего метода. Независимо от того, указывал ли соответствующий метод на то, что матрица Q устойчивая или неустойчивая, фиксировалось соответствующее время на выяснение данного вопроса. Расчеты проводились в Matlab R2021b на ПК с процессором AMD Ryzen 5 PRO 4650U with Radeon Graphics 2.10 GHz и ОЗУ 8 GB. Результаты для CVX и Yalmip/SeDuMi, а также для леммы 2 и следствия 3 были получены почти одинаковые, поэтому их графики на рис. 3 попарно совпали. Также отметим, что при анализе предложенных результатов не было достигнуто предельное значение времени расчета из-за того, что Matlab R2021b не формировал матрицу размерности больше, чем 25 000.

Выводы:

- алгоритмы eig, lyap, CVX и Yalmip/SeDuMi обеспечивают более точный результат при определении устойчивости (обеспечивают меньшую ошибку отклонения полученного решения от истинного значения) по сравнению с предложенными оценками;
- затрачиваемое время на выяснение вопроса устойчивости при использовании CVX и Yalmip/SeDuMi существенно возрастает (в меньшей степени при использовании eig и lyap) при росте числа агентов в сети, в то время как предложенные результаты наименее затратны по времени расчета.

Замкнутая система (15) содержит матрицу с диагональным преобладанием. В [6–18], где также использовались матрицы с диагональным преобладанием, отмечалось, что это достаточно узкий класс исследуемых объектов. В следующих разделах покажем, что предложенные результаты можно применять к системам с матрицами без диагонального преобладания. Диагональное преобладание будет предъявляться к выражениям, полученным с использованием аппарата функций Ляпунова.

3.2. Анализ устойчивости линейных нестационарных систем с интервально неопределенными параметрами и матрицами без диагонального преобладания

В данном разделе рассмотрим модификацию теоремы Демидовича [19, теорема 6.1; 23] (в литературе также используется термин «условие Демидовича») об исследовании устойчивости линейных систем с известными нестационарными параметрами на случай интервальной неопределенности и наличия внешних возмущений. Пусть исследуемый объект представлен уравнением

$$(16) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t)f(t),$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $f \in \mathbb{R}^l$ – внешний сигнал такой, что $\sup\{|f(t)|\} \leq \bar{f}$, $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ и $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такие, что $\sup\{\|F(t)\|\} \leq \bar{F}$, $A(t) = A_0 + \Delta A(t)$, $A_0 = (a_{ij}^0)$, $\Delta A(t) = (\Delta a_{ij}(t))$, $\Delta a_{ii} \leq \Delta a_{ii}(t) \leq \Delta \bar{a}_{ii}$ и $|\Delta a_{ij}(t)| \leq m_{ij}$ при $i \neq j$ и для всех t .

Введем матрицу $\bar{A}(t)$, где

$$(17) \quad \begin{aligned} \bar{A}(t) &= A(t) + A^T(t) = \bar{A}_0 + \Delta \bar{A}(t), \\ \bar{A}_0 &= (\bar{a}_{ij}^0) = (a_{ij}^0 + a_{ji}^0), \\ \Delta \bar{A}(t) &= (\Delta \bar{a}_{ij}(t)) = (\Delta a_{ij}(t) + \Delta a_{ji}(t)), \\ 2\Delta a_{ii} &\leq \Delta \bar{a}_{ii}(t) \leq 2\Delta \bar{a}_{ii}, \\ |\Delta \bar{a}_{ij}(t)| &\leq m_{ij} + m_{ji} \quad \text{при } i \neq j. \end{aligned}$$

Отметим, что система (16) содержит матрицу $A(t)$ без диагонального преобладания. Как будет показано в теореме ниже, диагональное преобладание понадобится в матрице $\bar{A}(t)$.

Согласно теореме Демидовича [19, теорема 6.1; 23], система (16) асимптотически устойчива при $f(t) \equiv 0$ и с известной матрицей $A(t)$, если собственные значения матрицы $A(t) + A^T(t)$ принимают отрицательные значения для всех t . Далее рассмотрим обобщение данной теоремы на интервально неопределенные матрицы с учетом следствия 3.

Теорема 1. Обозначим через σ любую из оценок сверху, вычисленную с помощью (12) для собственных значений матрицы $\bar{A}(t)$ в (17). Если $\sigma < 0$, то справедлива следующая оценка:

$$(18) \quad |x(t)| \leq -\frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} + Ce^{0,5\sigma t},$$

$$\text{где } C = \max \left\{ 0, |x(0)| + \frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} \right\}.$$

Доказательство. Выберем функцию Ляпунова

$$(19) \quad V = x^T x$$

и найдем производную от нее вдоль решений (16) в виде

$$\dot{V} = x^T \bar{A}(t)x + 2x^T F(t)f.$$

Найдем оценку сверху:

$$(20) \quad \dot{V} \leq \sigma x^T x + 2|x||F(t)||f| \leq \sigma V + 2\sqrt{V}\|\bar{F}\|\bar{f}.$$

Решим неравенство (20) в виде

$$(21) \quad \sqrt{V} \leq -\frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} + \left(\sqrt{V(0)} + \frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} \right) e^{0,5\sigma t}.$$

Учитывая (19), получим

$$(22) \quad |x(t)| \leq -\frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} + \left(|x(0)| + \frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} \right) e^{0,5\sigma t}.$$

Из выражения (22) следуют результат (18).

Пример 3. Система с постоянными параметрами с матрицей без диагонального преобладания. Рассмотрим систему (16) с параметрами $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2,5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = [0 \ 0,05]^T$ и $u = \sin(t)$. Матрица A не является сверхустойчивой [6–8] или с диагональным преобладанием [4, 9–18] ни по строкам, ни по столбцам. Также не существуют $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$, чтобы были выполнены условия (2), так как неравенства $d_1 - 3d_2 > 0$ и $-2,5d_1 + 2d_2 > 0$, составленные для матрицы A , и неравенства $d_1 - 2,5d_2 > 0$ и $-3d_1 + 2d_2 > 0$, составленные для матрицы A^T , не имеют решения.

Рассмотрим матрицу $\bar{A} = A + A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0,5 \\ 0,5 & -4 \end{bmatrix}$. Условие (2) будет выполнено для $\bar{A}$, где $\sigma = \sigma_{\max}(\bar{A}) = -1,5$. Наибольшее собственное число матрицы $A + A^T$ равно $-1,88$. Если воспользоваться другим условием в (2) с $d_1 = 1$ и $d_2 = 0,711$, то оценку собственного числа можно улучшить до $\sigma = \sigma_{\max}^D(\bar{A}) = -1,6445$.

Пример 4. Система с нестационарными параметрами с матрицей без диагонального преобладания. Рассмотрим систему (16) с параметрами с $A(t) = A_0 + \Delta A(t)$, где $A_0 = A$ из предыдущего примера, $\Delta A(t) = 0,1 \begin{bmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \sin(2t) & \sin(4t) \end{bmatrix}$. Оценки сверху (17) дают отрицательные значения, следовательно, система (16) устойчива.

3.3. Синтез закона управления для линейных систем с матрицами без диагонального преобладания

Рассмотрим систему

$$(23) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t)f(t),$$

где $u \in \mathbb{R}^m$ – сигнал управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B(t) = b(t)B_0$, $\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b} \in \mathbb{R}$, B_0 – известная матрица, пара $(A(t), B(t))$ управляема для всех t . Остальные обозначения как в (16). Предположим, что неизвестны параметры $\Delta A(t)$, $b(t)$, $F(t)$ и $f(t)$.

Введем закон управления

$$(24) \quad u = Kx,$$

где $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ниже сформулированы теоремы, позволяющие рассчитать матрицу K , которая обеспечивает устойчивость замкнутой системы

$$(25) \quad \dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K)x(t) + F(t)f(t).$$

Отметим, что ни в матрице $A(t)$, ни в матрице $A(t) + B(t)K$ не требуется выполнение свойства диагонального преобладания.

Теорема 2. Пусть матрицы A , B и F в (23) известны и постоянны, а также пусть для заданного $\alpha > 0$ существует матрица $Q = Q^T$ и коэффициент $\beta > 0$ такие, что выполнены следующие условия:

$$(26) \quad \begin{aligned} \Psi_{ii} &< 0, \\ \Psi_{ij} &\geq 0 \text{ при } i \neq j, \ i, j = 1, \dots, n, \\ \sigma(Q) &> 0, \end{aligned}$$

где

$$(27) \quad \Psi = (\Psi_{ij}) := QA^T + AQ + Y^TB^T + BY + \alpha Q + \beta F^TF,$$

$\sigma(Q)$ – одна из оценок снизу на собственные значения матрицы Q , полученная с помощью (2), а также $K = YQ^{-1}$ и $P = Q^{-1}$. Тогда для решений системы (25) будет справедлива оценка

$$(28) \quad |x(t)| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(\frac{\bar{f}^2}{\alpha\beta} + \mathcal{K}e^{-\alpha t} \right) \right]^{0,5},$$

$$\text{где } \mathcal{K} = \max \left\{ 0, x(0)^T P x(0) - \frac{\bar{f}^2}{\alpha\beta} \right\}.$$

Доказательство. Выберем функцию Ляпунова

$$(29) \quad V = x^T P x,$$

где $P = Q^{-1}$, и найдем от нее производную по времени вдоль решений (25):

$$(30) \quad \dot{V} = x^T [(A + BK)^T P + P(A + BK)] x + 2x^T F f.$$

Обозначив $z = \text{col}\{x, f\}$ и подставив (29) и (30) в условие экспоненциальной устойчивости $\dot{V} + \alpha V + \gamma f^T f < 0$, $\gamma = 1/\beta$, получим

$$(31) \quad z^T \begin{bmatrix} (A + BK)^T P + P(A + BK) + \alpha P & PF \\ \star & -\gamma I \end{bmatrix} z < 0.$$

Согласно [24] неравенство (31) будет выполнено, если будет выполнено следующее условие:

$$(32) \quad \begin{bmatrix} (A + BK)^T P + P(A + BK) + \alpha P & PF \\ \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

Воспользовавшись леммой Шура [24] и тем, что $\gamma = 1/\beta$, перепишем (32) в виде

$$(33) \quad (A + BK)^T P + P(A + BK) + \alpha P + \beta P F^T F P < 0.$$

Умножив слева и справа (33) на Q^{-1} и заменив $Y = KQ$, получим

$$(34) \quad \Psi := Q A^T + A Q + Y^T B^T + B Y + \alpha Q + \beta F^T F < 0.$$

Согласно леммам 1 и 2 собственные значения симметричных матриц Ψ и Q будут отрицательны и положительны соответственно, если будут выполнены неравенства (26). С другой стороны, согласно [4] (теорема 7.2.1) эрмитова матрица положительно (отрицательно) определена в том и только в том случае, если все ее собственные значения положительны (отрицательны). Значит, условия $\Psi < 0$ и $Q > 0$ будут выполнены, если будут выполнены неравенства (26). Оценка (28) следует из решения неравенства $\dot{V} + \alpha V + \gamma f^T f < 0$ с учетом (29) и оценки $\lambda_{\min}\{P\}|x|^2 \leq x^T P x$.

С использованием результатов теоремы 2 сформулируем следующую теорему для систем с неизвестными нестационарными параметрами.

Теорема 3. *Рассмотрим систему (23) с нестационарными параметрами. Пусть существует матрица $Q = Q^T$ и коэффициент $\beta > 0$ такие, что выполнены условия*

$$(35) \quad \begin{aligned} \Phi_{ii} &< 0, \\ \Phi_{ij} &\geq 0 \text{ при } i \neq j, \\ \sigma(Q) &> 0, \end{aligned}$$

в вершинах $|\Delta a_{ij}(t)| \leq m_{ij}$ и $\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b}$, где

$$\begin{aligned} \Phi = (\Phi_{ij}) := & QA_0^T + A_0Q + Q\Delta A^T(t) + \Delta A(t)Q + \\ & + b(t)Y^TB_0^T + b(t)B_0Y + \alpha Q + \beta \bar{F}^2I, \end{aligned}$$

$\sigma(\Psi)$ – одна из оценок сверху матрицы Ψ , полученная с помощью (12), а также $K = YQ^{-1}$ и $P = Q^{-1}$. Тогда для решений системы (25) будет справедлива оценка (28).

Доказательство. Воспользуемся результатами (29)–(34) из доказательства теоремы 2 с учетом нестационарных параметров. Поскольку $A(t) = A_0 + \Delta A(t)$, $B(t) = b(t)B_0$ и $\|F(t)\| \leq \bar{F}$, то перепишем (34) в виде

$$\begin{aligned} \Phi := & QA_0^T + A_0Q + Q\Delta A^T(t) + \Delta A(t)Q + b(t)Y^TB_0^T + \\ & + b(t)B_0Y + \alpha Q + \beta \bar{F}^2I < 0. \end{aligned}$$

Если выполнены условия (35) в вершинах $|\Delta a_{ij}(t)| \leq m_{ij}$ и $\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b}$, то согласно [24] условие (35) будет выполнено для любых $\Delta A(t)$ и $b(t)$ внутри политопа с вершинами $|\Delta a_{ij}(t)| \leq m_{ij}$ и $\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b}$. Оценка (28) получается аналогично, как в доказательстве теоремы 2.

Пример 5. Рассмотрим систему (23) с параметрами $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \text{col}\{0; 0; 1\}$, $F = \text{col}\{0, 1; 0, 5; 1\}$ и $f(t) = \sin(t)$.

Очевидно, что матрица A без диагонального преобладания, а структура матрицы B не позволяет законом управления $u = Kx$ с $K \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ привести к замкнутой системе с матрицей с диагональным преобладанием. Поэтому воспользуемся теоремой 2 для анализа области локализации собственных значений матрицы Φ , полученной в результате применения метода функций Ляпунова. Воспользовавшись теоремой 2, получим $K = \text{col}\{-1,3671; -2,3619; -2,5724\}$ и $\text{trace}(P) = 25,5858$ при $\alpha = 1$. Воспользовавшись [25], получим $K = \text{col}\{-2,8862; -4,9244; -3,2136\}$ и $\text{trace}(P) = 40,631$ при $\alpha = 1$. В обоих случаях ставилась цель $\text{trace}(P) \rightarrow \min$ для расчета K .

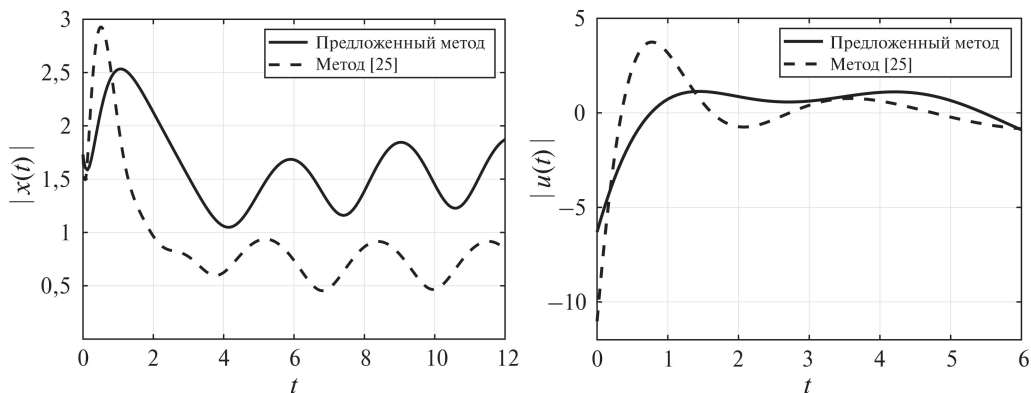


Рис. 4. Переходные процессы по $|x(t)|$ и $u(t)$ для предложенного алгоритма (сплошные кривые) и алгоритма [25] (пунктирные кривые).

Из рис. 4 видно, что в установившемся режиме значение $|x(t)|$ предложенного алгоритма больше. Однако меньше всплеск $|x(t)|$ и амплитуда сигнала управления $u(t)$ в начальный момент времени, а также меньше значение $trace(P)$.

4. Заключение

В статье рассмотрено применение теоремы о кругах Гершгорина и производных от нее теорем для оценки области локализации собственных значений матрицы с постоянными и известными параметрами. Данные результаты обобщаются на оценку области локализации для матриц с параметрической интервальной неопределенностью. Предложено понятие ϵ -круга, позволяющее получить более точные оценки области локализации, чем прямое применение теоремы Гершгорина. Полученные результаты применены к управлению сетевыми системами, где показано, что для задач большой размерности предложенные результаты наименее затратны по времени выполнения операции по сравнению с процедурами `eig` и `lyap` (команды в MatLab для нахождения собственных значений матрицы и решения уравнения Ляпунова), а также CVX и Yalmip/SeDuMi для решения линейных матричных неравенств. Предложено обобщение условия Демидовича для выяснения устойчивости нестационарной матрицы. Разработан подход по расчету матрицы в линейном законе управления при управлении линейными системами, где не выполнено свойство диагонального преобладания для матриц в замкнутой системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория автоматического управления. Часть 1. Под ред. А.А. Воронова. М.: Высш. шк., 1986.
2. Фуртат И.Б., Гуцин П.А. Методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления при наличии возмущений и запаздывания. Ижевск: Изд-во «ИКИ», 2021.

3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
4. Хорн Р.А., Джонсон С.Р. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
6. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // АиТ. 2002. № 8. С. 37–53.
7. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // АиТ. 2002. № 11. С. 56–75.
8. Поляк Б.Т. Обобщенная сверхустойчивость в теории управления // АиТ. 2004. № 4. С. 70–80.
9. Uronen P., Jutila E.A.A. Stability via the theorem of Gershgorin // Int. J. Control. 1972. V. 16. No. 6. P. 1057–1061.
10. Соловьев В.Н. Обобщение теоремы Гершгорина // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. № 47. Т. 6. С. 1285–1302.
11. Curran P.F. On a variation of the Gershgorin circle theorem with applications to stability theory // IET Irish Signals and Systems Conference (ISSC 2009), Dublin, 2009. P. 1–5.
12. Vijay Hote, Amar Nath Jha. New approach of Gerschgorin theorem in model order reduction // Int. J. Model. Simulat. 2015. V. 35. P. 143–149.
13. Li C.-K., Zhang F. Eigenvalue continuity and Gershgorin's theorem // Electron. J. Linear Algebra. 2019. V. 35. P. 619–625.
14. Kazakova-Frehse N., Frick K. The estimation of a robust domain of attraction using Gershgorin theorem // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1998. V. 8. P. 295–303.
15. Vijay Hote, Amar Nath Jha. Reduced order state feedback controller design // 2014 Int. Conference on Advances in Engineering & Technology Research (ICAETR – 2014), 2014. P. 1–6.
16. Pachauri N., Rani A. Gerschgorin theorem based stability analysis of chemical process // 2014 Int. Conference on Advances in Engineering & Technology Research (ICAETR – 2014), 2014. P. 1–5.
17. Xie L., Huang J., Tan E., He F., Liu Z. The Stability Criterion and Stability Analysis of Three-Phase Grid-Connected Rectifier System Based on Gerschgorin Circle Theorem // Electronics. 2022. V. 11. No. 20, 3270.
18. Adom-Konaduy A., Albert Lanor Sackiteyz, Anokyex M. Local Stability Analysis Of Epidemic Models Using A Corollary Of Gershgorin's Circle Theorem // Applied Mathematics E-Notes. 2023. V. 23. P. 159–174.
19. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
20. Цыпкин Я.З., Бромберг П.В. О степени устойчивости линейных систем // Известия АН СССР, ОТН. 1945. № 12.
21. Рубинчик А.М. Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах / Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики. М.: Машгиз, 1952.
22. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения систем автоматического регулирования // АиТ. 1948. Т. 9. № 4. С. 253–279.
23. Халил Х.К. Нелинейные системы. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.

24. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
25. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 03.10.2024

После доработки 28.02.2025

Принята к публикации 14.03.2025